Théorème d'Abel angulaire :

I Le développement

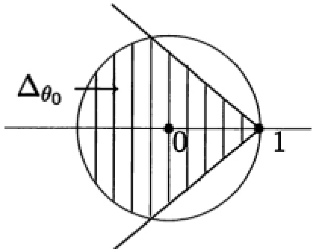
Le but de ce développement est de démontrer le théorème d'Abel angulaire qui est un résultat de continuité de la somme d'une série entière.

Théorème 1 : Théorème d'Abel angulaire [Gourdon, p.263] :
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \geq 1$ telle que $\sum a_n$ converge et de somme notée f sur le disque unité.
Si on fixe $\theta_0 \in [0; \frac{\pi}{2}[$ et que l'on pose :

$$\Delta_{\theta_0} = \left\{ z \in \mathbb{C} \text{ tq } |z| < 1 \text{ et } \exists \rho > 0,\ \exists \theta \in [-\theta_0; \theta_0] \text{ tq } z = 1 - \rho e^{i\theta} \right\}$$

alors on a : $\lim_{\substack{z \to 1 \\ z \in \Delta_{\theta_0}}} f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Preuve :
Commençons tout d'abord par représenter graphiquement la situation :



Notons $S = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ et $R_n = S - S_n$ (bien définies car la série $\sum a_k$ converge par hypothèse).

Le but étant de majorer $|f(z) - S|$, on va effectuer une transformation d'Abel en écrivant que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = R_{n-1} - R_n$.

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$.
Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\left(\sum_{n=0}^{N} a_n z^n \right) - S_N = \left(\sum_{n=0}^{N} a_n z^n \right) - \sum_{n=0}^{N} a_n = \sum_{n=1}^{N} (R_{n-1} - R_n)(z^n - 1)$$
$$= \sum_{n=0}^{N-1} R_n (z^{n+1} - 1) - \sum_{n=1}^{N} R_n (z^n - 1)$$
$$= \sum_{n=0}^{N-1} R_n (z^{n+1} - z^n) - R_N \left(z^N - 1 \right) = (z-1) \sum_{n=0}^{N-1} R_n z^n - R_N \left(z^N - 1 \right)$$

En faisant tendre N vers $+\infty$, on obtient alors que :

$$f(z) - S = (z-1) \sum_{n=0}^{+\infty} R_n z^n \quad (*)$$

Fixons maintenant $\varepsilon > 0$ ainsi que $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier naturel $n \geq N$ on ait $|R_n| \leq \varepsilon$ (possible car le suite des restes tend vers 0 car la série $\sum a_k$ converge par hypothèse).

D'après $(*)$, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, on a :

$$|f(z) - S| \leq |z-1| \left| \sum_{n=0}^{N-1} R_n z^n \right| + \varepsilon |z-1| \left(\sum_{n=N}^{+\infty} |z|^n \right) \leq |z-1| \left(\sum_{n=0}^{N-1} |R_n| \right) + \varepsilon \frac{|z-1|}{1-|z|} \quad (**)$$

Soit $z \in \Delta_{\theta_0}$, de sorte que $z = 1 - \rho e^{i\varphi}$ avec $\rho > 0$ et $|\varphi| \leq \theta_0$.
On a donc $|z|^2 = 1 - 2\rho\cos(\varphi) + \rho^2$ et lorsque $\rho \leq \cos(\theta_0)$, on a la majoration :

$$\frac{|z-1|}{1-|z|} = \frac{|z-1|}{1-|z|^2}(1+|z|) = \frac{\rho}{2\rho\cos(\varphi) - \rho^2}(1+|z|) \leq \frac{2}{2\cos(\varphi) - \rho}$$
$$\leq \frac{2}{2\cos(\theta_0) - \cos(\theta_0)} = \frac{2}{\cos(\theta_0)}$$

Si on choisit $\alpha > 0$ tel que $\alpha \sum_{n=0}^{N-1} |R_n| < \varepsilon$, alors pour $z \in \Delta_{\theta_0}$ tel que l'on ait $|z-1| \leq \min(\alpha, \cos(\theta_0))$, la majoration $(**)$ entraîne que :

$$|f(z) - S| \leq \alpha \frac{\varepsilon}{\alpha} + \varepsilon \frac{2}{\cos(\theta_0)} = \varepsilon \left(1 + \frac{2}{\cos(\theta_0)} \right)$$

Ainsi, on a donc $\lim_{\substack{z \to 1 \\ z \in \Delta_{\theta_0}}} f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

■

Exemple 2 : [Gourdon, p.264]
$*$ En appliquant ce résultat à la série $\sum \frac{(-1)^n}{2n+1}$ (qui converge par le critère spécial des séries alternées), on retrouve le fait que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \lim_{x \to 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^n = \lim_{x \to 1^-} \mathrm{Arctan}(x) = \mathrm{Arctan}(1) = \frac{\pi}{4}$$

$*$ De même, on retrouve le fait que $\ln(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

La réciproque de ce théorème est cependant fausse... Par exemple, on a :

$$\lim_{\substack{z\to 1\\ |z|<1}} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^n = \lim_{\substack{z\to 1\\ |z|<1}} \frac{1}{1+z} = \frac{1}{2}$$

et pourtant la série $\sum (-1)^n$ diverge !

II Remarques sur le développement

II.1 Pour aller plus loin...

La réciproque du théorème d'Abel angulaire est vraie modulo un hypothèse supplémentaire :

Théorème 3 : Théorème taubérien faible [Gourdon, p.264] :
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence égal à 1 et f la somme de cette série entière sur le disque unité.
Si $a_n \underset{n\to+\infty}{=} o(\frac{1}{n})$ et s'il existe $S \in \mathbb{C}$ tel que $\lim_{x\to 1^-} f(x) = S$, alors $\sum a_n$ converge et on a $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = S$.

Preuve :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$.

On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in]0;1[,\ S_n - f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k(1-x^k) - \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k$$

De plus, comme $x \in]0;1[$, on a $(1-x^k) = (1-x)\sum_{n=0}^{k-1} x^n \leq k(1-x)$ et on en déduit que :

$$|S_n - f(x)| \leq (1-x)\sum_{k=0}^{n} k|a_k| + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{k|a_k|}{n} x^k \leq (1-x)Mn + \frac{\sup_{k\geq n} k|a_k|}{n(1-x)}$$

avec M un majorant de la suite $(k|a_k|)_{k\in\mathbb{N}}$ (elle est bien majorée car elle tend vers 0).

Fixons maintenant $\varepsilon \in]0;1[$.
L'inégalité précédente devient alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left|S_n - f\left(1-\frac{\varepsilon}{n}\right)\right| \leq M\varepsilon + \frac{\sup_{k\geq n} k|a_k|}{\varepsilon}$$

Donc si N_0 est choisi tel que $\sup_{k\geq n} k|a_k| < \varepsilon^2$ (on peut car le suite $(ka_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers 0), on a alors :

$$\forall n \geq N_0,\ \left|S_n - f\left(1-\frac{\varepsilon}{n}\right)\right| \leq M\varepsilon + \varepsilon = \varepsilon(M+1)$$

Par hypothèse, $f(x)$ tend vers S lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures, donc il existe $N_1 \geq N_0$ tel que pour tout $n \geq N_1$ on ait : $\left|f\left(1-\frac{\varepsilon}{n}\right) - S\right| \leq \varepsilon$.

Ainsi, on a finalement :

$$\forall n \geq N_1,\ |S_n - S| \leq \left|S_n - f\left(1 - \frac{\varepsilon}{n}\right)\right| + \left|f\left(1 - \frac{\varepsilon}{n}\right) - S\right| \leq \varepsilon(M+1) + \varepsilon = \varepsilon(M+2)$$

On en déduit que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers S et on a donc le résultat voulu.

■

Le théorème taubérien faible reste vrai en supposant seulement que $a_n \underset{n\to+\infty}{=} O(\frac{1}{n})$. On obtient alors le théorème suivant :

Théorème 4 : Théorème taubérien fort [Gourdon, p.308] :
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence égal à 1 et F la somme de cette série entière sur le disque unité.
Si $a_n \underset{n\to+\infty}{=} O(\frac{1}{n})$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} F(x) = 0$, alors la série $\sum a_n$ converge et sa somme est nulle.

Ce théorème permet d'en déduire un autre théorème qui est le théorème taubérien d'Hardy-Littlewood :

Théorème 5 : Théorème taubérien d'Hardy-Littlewood [Gourdon, p.309] :
Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.
Si $b_n \underset{n\to+\infty}{=} O(\frac{1}{n})$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n = \ell$, alors la série $\sum b_n$ converge et sa somme vaut ℓ.

II.2 Recasages

Recasages : 230 - 241 - 243.

III Bibliographie

— Xavier Gourdon, *Les maths en tête, Analyse*.